

**Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires**  
**ANÁLISIS MATEMÁTICO III**

**BREVES NOTAS SOBRE LA ECUACIÓN DE ONDAS BIDIMENSIONAL**

*D. Prelat - 2021*

El objetivo de estas notas es presentar a los alumnos uno de los problemas de la física clásica que motivaron gran parte de los profundos desarrollos matemáticos en el siglo XIX. Presentaremos el problema y motivaremos – es nuestra intención – la aparición de herramientas poderosas, como por ejemplo el Teorema de Fuchs y la Teoría de Sturm-Liouville. No se puede pretender, obviamente, que en un cuatrimestre los alumnos se conviertan en especialistas en ecuaciones diferenciales, tema que por sí solo requiere de varios años de estudio y formación matemática. La finalidad es que tomen contacto con estos temas, abriendo una puerta para los posibles interesados.

El problema a estudiar es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) \Delta u(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 & \text{si } x^2 + y^2 < r_0^2, t > 0 \\ (ii) u(x, y, t) = 0 & \text{si } x^2 + y^2 = r_0^2, t \geq 0 \\ (iii) (a) u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ (b) \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = u_1(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 \leq r_0^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

donde, como es habitual,  $\Delta u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}$ .

Se trata del modelo matemático aproximado (para “pequeñas” vibraciones y sin tomar en cuenta las fuerzas no elásticas) del movimiento de una membrana circular vibrante, de radio  $r_0$  y con extremos fijos. En un sistema de coordenadas con origen en el centro de la membrana,  $u(x, y, t)$  representa el desplazamiento vertical del punto de coordenadas  $(x, y)$  respecto de la posición de reposo, en el instante  $t$ . La constante  $c$  es dato del problema (se relaciona con la velocidad de propagación de la onda asociada al movimiento de la membrana) y las funciones  $u_0$  (posición inicial) y  $u_1$  (velocidad inicial) también son datos del problema; asumimos que son continuas. La función  $u$  (a calcular) se supone de clase  $C^2$  en el cilindro abierto  $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < r_0^2, t > 0\}$   $= D(0; r_0) \times (0, +\infty)$  y continua en su borde.

En el apéndice 3 del apunte sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales puede verse la demostración de la unicidad de la solución del problema (1). Esta unicidad no solamente tiene importancia teórica, si no práctica, como veremos a continuación. Ahora tenemos que encontrar, si existe, esta solución. Primero haremos un cambio de variables bastante natural, dada la forma circular del recinto espacial: coordenadas polares (o cilíndricas, si incluimos la tercera variable). Es decir, para cada función  $u$  definida en el cilindro  $\overline{D}(0; r_0) \times [0, +\infty)$ , consideramos la función

$$v(r, \theta, t) = u(r \cos(\theta), r \sin(\theta), t) \quad (2)$$

El problema (1), en términos de la función  $v$  resulta (dejamos las cuentas como ejercicio):

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) \frac{\partial^2 v(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 & \text{si } 0 \leq r < r_0, t > 0 \\ (ii) v(r_0, \theta, t) = 0 & \text{si } t \geq 0 \\ (iii) (a) v(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta) & \text{si } 0 \leq r \leq r_0 \\ & (b) \frac{\partial v(r, \theta, 0)}{\partial t} = v_1(r, \theta) \quad \text{si } 0 \leq r \leq r_0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Puede observarse la aparición de una singularidad en la ecuación (i) para  $r = 0$ , es decir, en el centro del disco. Pero se trata de una singularidad del sistema de coordenadas polares, no de una singularidad geométrica (es decir: física).

Ahora busquemos, si existe, la solución del problema (3) mediante el popular método de separación de variables. Recordemos que este método consiste dos pasos:

(A) Encontrar una sucesión  $(v_n)_{n=0}^{\infty}$  de la parte lineal del problema, que en nuestro caso consiste en las ecuaciones (i) y (ii). Para encontrar esta sucesión se procede, habitualmente, a buscar soluciones de la forma  $v_n(r, \theta, t) = \rho_n(r) \varphi_n(\theta) \tau_n(t)$ , y de aquí procede el nombre de *separación de variables*.

(B) Plantear una solución del problema en la forma  $v(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n(r, \theta, t)$ . Este paso utiliza lo que se conoce como “principio de superposición”, que es una versión exagerada de la linealidad: cualquier combinación lineal de soluciones de (i) y (ii) también es solución de las mismas ecuaciones. El problema es que ahora se plantea una serie, no una suma finita, con la esperanza de que los vientos de la convergencia soplen a favor.

En muchas ocasiones, en lugar de una sucesión  $(v_n)_{n=0}^{\infty}$  de la parte lineal del problema, se obtiene una sucesión doblemente indicada, es decir:  $(v_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$ , con lo cual el principio de superposición plantea una serie doble  $v(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} v_{n,k}(r, \theta, t)$ .

Obviamente, pueden aparecer más índices o series más complicadas, como nos va a pasar dentro de un rato, pero - comparado con las demás dificultades - se trata de un problema menor.

Busquemos entonces, una “buena cantidad” de soluciones de la parte lineal de (3) (es decir: de (i) y (ii) ) en la forma

$$v(r, \theta, t) = \rho(r)\varphi(\theta)\tau(t) \quad (4)$$

Para estas funciones tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho''(r)\varphi(\theta)\tau(t) + \frac{1}{r} \rho'(r)\varphi(\theta)\tau(t) + \frac{1}{r^2} \rho(r)\varphi''(\theta)\tau(t) &= \frac{1}{c^2} \rho(r)\varphi(\theta)\tau''(t) \end{aligned}$$

En los puntos donde  $v(r, \theta, t) = \rho(r)\varphi(\theta)\tau(t) \neq 0$ , podemos dividir esta última ecuación por  $v$  y obtenemos

$$\frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r} \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} = \frac{1}{c^2} \frac{\tau''(t)}{\tau(t)} \quad (5)$$

El primer miembro es función de las coordenadas polares (no de  $t$ ) y el segundo solamente depende de  $t$ . Por lo tanto, planteamos la primera separación de variables

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\tau''(t)}{\tau(t)} &= cte_1 \\ \text{(II)} \quad \frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r} \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} &= cte_1 \end{aligned} \quad (6)$$

De (I) tenemos  $\tau''(t) - cte_1 c^2 \tau(t) = 0$ . Si la constante  $cte_1$  es positiva, las soluciones de esta ecuación son exponenciales, y si es negativa, son periódicas. Aquí comenzamos a descansar en la unicidad del problema. Sabemos que si encontramos una solución del problema, es única. Por lo tanto, no tenemos que preocuparnos en cada paso por las posibles soluciones descartadas. Para la constante  $cte_1$ , la situación física sugiere,

obviamente, la segunda elección. Pongamos  $cte_1 = -\alpha^2$ . Entonces, la función  $\tau$  es de la forma

$$\tau(t) = a \cos(\alpha t) + b \operatorname{sen}(\alpha t) \quad (7)$$

para algún par de constantes  $a$  y  $b$ . En (II) tenemos, ahora:

$$\frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r} \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} = -\alpha^2,$$

es decir:

$$r^2 \frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + r \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + r^2 \alpha^2 = -\frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)}$$

y podemos proceder con la segunda separación de variables:

$$(III) \quad -\frac{\varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)} = cte_2$$

$$(IV) \quad r^2 \frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + r \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + r^2 \alpha^2 = cte_2$$

Por razones totalmente análogas al caso de la primera constante, elegimos el signo positivo para la constante  $cte_2$ , es decir:  $cte_2 = \beta^2$ . Entonces, de (III) deducimos que  $\varphi$  es de la forma

$$\varphi(\theta) = a' \cos(\beta\theta) + b' \operatorname{sen}(\beta\theta) \quad (8)$$

Dado el significado geométrico de la variable  $\theta$ , es claro que la función  $\varphi$  debe ser  $2\pi$ -periódica. Por lo tanto, la constante  $\beta$  debe ser un entero. Puesto que  $cte_2 = \beta^2$ , elegimos enteros no negativos (seguimos descansando en la unicidad). Utilizaremos la notación habitual  $n$  para los enteros no negativos y escribiremos

$$\varphi(\theta) = a' \cos(n\theta) + b' \operatorname{sen}(n\theta) \quad (9)$$

Finalmente, la ecuación (IV) es, entonces:

$$r^2 \frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + r \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + r^2 \alpha^2 = n^2$$

es decir:

$$r^2 \rho''(r) + r \rho'(r) + [r^2 \alpha^2 - n^2] \rho(r) = 0 \quad (10)$$

La hemos dejado última por buenas razones. Este tipo de ecuación no ha sido presentada en ninguno de los cursos de matemática anteriores. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria lineal, pero con coeficientes no constantes. Mediante el cambio de variables  $x = \alpha r$  (consideramos  $\alpha \neq 0$ ), introducimos la función  $y(x) = \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)$  (es decir:  $\rho(r) = y(\alpha r)$ ) en la ecuación (10) y nos queda

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + [x^2 - n^2]y(x) = 0 \quad (11)$$

Se trata de una ecuación famosa (aunque no sea muy mencionada en la TV): la ecuación de Bessel de orden  $n$ , intensamente estudiada desde el siglo XIX. Deben su nombre al matemático y astrónomo Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846), que estudió las soluciones de la ecuación (11), aunque estas funciones ya habían sido descubiertas por uno de los numerosos Bernouilli, Daniel Bernouilli (1700 – 1782). Dada su aparición en un problema de ecuación de ondas, no es sorprendente que las funciones de Bessel tengan tanta importancia en la física y la ingeniería. Para el estudio de la ecuación (11), son fundamentales los siguientes resultados, que resumimos sin demostración en el siguiente:

**TEOREMA:** Sean  $p$  y  $q$  dos funciones reales continuas en un intervalo  $I$ . Dada la ecuación diferencial  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ :

(a) El conjunto de soluciones es un espacio vectorial real de dimensión 2.

(b.1) Si los coeficientes  $p$  y  $q$  admiten desarrollos en series de potencias

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < r$$

entonces la ecuación admite al menos una solución

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < r$$

(es decir: con el mismo radio de convergencia que los coeficientes). Y si los coeficientes son polinómicos, la ecuación admite al menos una solución polinómica.

(b.2) Si se verifican los desarrollos

$$xp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x^2 q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < r$$

y los coeficientes  $a_0, b_0, b_1$  no son simultáneamente nulos, entonces la ecuación admite al menos una solución de la forma:

$$y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

donde  $\alpha$  es una constante real, la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  tiene radio de convergencia  $r$  y  $c_0 \neq 0$ .

□

La parte (a) del teorema ha sido estudiada en Álgebra II en el caso en que los coeficientes de la ecuación son constantes. La demostración del caso general puede verse, por ejemplo, en el capítulo 2 de [KKO]. La importancia práctica es inmensa: conociendo dos soluciones  $y_1, y_2$  linealmente independientes, todas las soluciones son de la forma  $c_1 y_1 + c_2 y_2$ . La parte (b) del teorema es conocida como el teorema de Fuchs (Lazarus Fuchs; 1833 – 1902) y permite, en general, encontrar una base  $y_1, y_2$  del espacio de soluciones. Las demostraciones pueden consultarse en cualquier buen libro de ecuaciones diferenciales (damos una pequeña lista al final del apunte). El método de resolución (b.1) – (b.2) es muy directo, casi de fuerza bruta, digamos: consisten en derivar las series término a término, reemplazar en la ecuación y determinar los coeficientes de las series, algunos de las cuales quedan indeterminados (hay por lo menos dos de ellos, como afirma la parte (a)).

Para poder aplicar este teorema a la ecuación (11), necesitamos llevarla a la forma  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , lo que solamente podemos hacer dividiendo por  $x^2$ :

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y(x) = 0 \quad (12)$$

De esta manera, nos queda  $p(x) = \frac{1}{x}$  y  $q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$  y estamos en la situación (b.2) del teorema. Para el cálculo práctico de dos soluciones básicas, se puede reemplazar la serie  $y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  en la ecuación (11) o (12), indistintamente. Para cada  $n$  entero positivo (o nulo) una solución que se puede obtener de esta forma es:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad (13)$$

denominada *función de Bessel de orden  $n$  de primera especie*. Observe que la serie de potencias (13) converge absolutamente para todo  $x$  y por lo tanto estas funciones son analíticas en toda la recta. El cálculo de una solución de (11) linealmente independiente con  $J_n$  no es nada sencillo y la más utilizada en las aplicaciones es *la función de Bessel de orden  $n$  de segunda especie*, usualmente indicada con el símbolo  $Y_n$ . No las utilizaremos aquí, pues están definidas para  $x > 0$  y no tienen límite (finito) cuando  $x \rightarrow 0^+$ , y nosotros necesitamos que las soluciones incluyan a  $x = 0$  ( $\Leftrightarrow r = 0$ ) en sus dominios.

Existen bibliotecas enteras dedicadas a las funciones de Bessel. Una referencia clásica es [AS], donde puede consultarse una lista bastante exhaustiva de propiedades de estas funciones, algunas de las cuales pueden verse en el apéndice de este apunte.

Una función de Bessel elemental es  $\phi(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x}}$ , que es solución de la ecuación

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left[ x^2 - \frac{1}{4} \right] y(x) = 0, \text{ es decir, la ecuación de Bessel de orden } \frac{1}{2}.$$

Ninguna de las funciones de Bessel  $J_n$  de orden entero es elemental, pero todas comparten el mismo comportamiento oscilante amortiguado de la función  $\phi$ , aunque los ceros cada  $J_n$  no están equiespaciados como los de  $\phi$ . La Teoría de Sturm-Liouville incluye resultados muy importantes sobre los ceros de las funciones de Bessel (y otras funciones muy importantes). En el apéndice mencionamos algunos de estos resultados. En particular, para cada entero  $n \geq 0$ , los ceros de  $J_n$  forman una sucesión  $(\mu_{n,k})_{k=1}^{\infty}$  estrictamente creciente de números reales tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n,k} = +\infty$ . Los ceros de las funciones de Bessel han sido estudiados desde hace mucho tiempo por necesidades prácticas, como veremos a continuación.

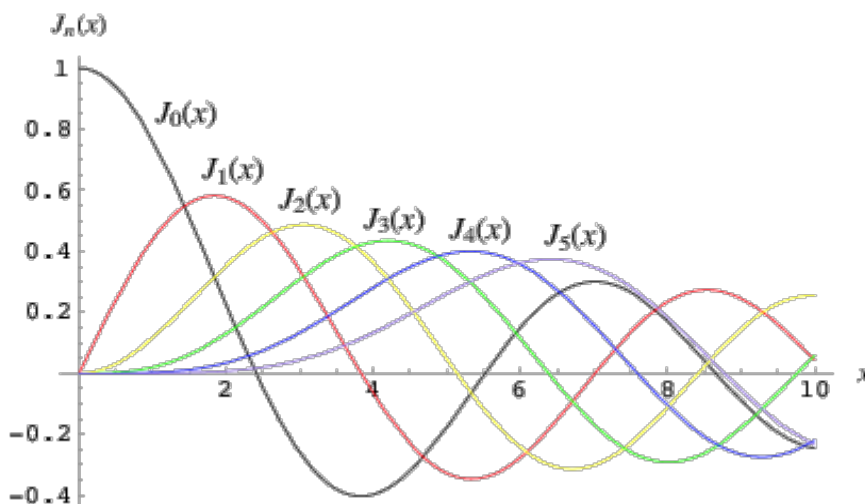


Fig 1. Gráficos de las primeras funciones de Bessel de orden entero.

<https://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>

En definitiva, entonces, de todas las soluciones

$$\rho(r) = y(\alpha r) = a'' J_n(\alpha r) + b'' Y_n(\alpha r)$$

de la ecuación (10) nos quedamos con las de la forma  $\rho(r) = a'' J_n(\alpha r)$ , pues necesitamos funciones bien definidas en  $r = 0$ . En realidad, tuvimos suerte: no pagamos demasiado cara la introducción de la singularidad del sistema de coordenadas polares.

Pasando en limpio, el muestrario de soluciones que hemos obtenido hasta ahora en la forma  $v(r, \theta, t) = \rho(r)\varphi(\theta)\tau(t)$  es

$$v(r, \theta, t) = J_n(\alpha r) [a' \cos(n\theta) + b' \operatorname{sen}(n\theta)] [a \cos(\alpha ct) + b \operatorname{sen}(\alpha ct)]$$

$$\alpha \in [0, +\infty), n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, a \in \mathfrak{R}, b \in \mathfrak{R}, a' \in \mathfrak{R}, b' \in \mathfrak{R}$$

(hemos suprimido coeficientes innecesarios). En esta lista de soluciones de la ecuación (3) (i), las que satisfacen la condición de contorno (3) (ii) son las que verifican  $\alpha r_0 = \mu_{n,k}$  para algún cero  $\mu_{n,k}$  de  $J_n$ . Por lo tanto, nos queda la lista

$$v(r, \theta, t) = J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{r_0} r\right) [a' \cos(n\theta) + b' \operatorname{sen}(n\theta)] \left[ a \cos\left(\frac{\mu_{n,k}}{r_0} ct\right) + b \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_{n,k}}{r_0} ct\right) \right]$$

$$n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, k \in \{1, 2, 3, \dots\}, a \in \mathfrak{R}, b \in \mathfrak{R}, a' \in \mathfrak{R}, b' \in \mathfrak{R}$$
(14)

de soluciones de (3)(i) y (3)(ii), es decir, de la parte lineal del problema (3).

Ahora, aplicamos el principio de superposición para buscar una solución del problema completo en la forma

$$v(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{r_0} r\right) [a'_{n,k} \cos(n\theta) + b'_{n,k} \operatorname{sen}(n\theta)] \left[ a_{n,k} \cos\left(\frac{\mu_{n,k}}{r_0} ct\right) + b_{n,k} \operatorname{sen}\left(\frac{\mu_{n,k}}{r_0} ct\right) \right]$$
(15)

Tenemos cuatro sucesiones (doblemente indicadas) de coeficientes para intentar las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(iii) (a) } v(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta) & \text{si } r \leq r_0 \\ \text{(b) } \frac{\partial v(r, \theta, 0)}{\partial t} = v_1(r, \theta) & \text{si } r \leq r_0 \end{array} \right.$$



$$v(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left( \frac{\mu_{n,k}}{r_0} r \right) [a'_{n,k} \cos(n\theta) + b'_{n,k} \operatorname{sen}(n\theta)] a_{n,k} = v_0(r, \theta) \quad (16)$$

$$\frac{\partial v(r, \theta, 0)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n \left( \frac{\mu_{n,k}}{r_0} r \right) [a'_{n,k} \cos(n\theta) + b'_{n,k} \operatorname{sen}(n\theta)] b_{n,k} \frac{\mu_{n,k}}{r_0} c = v_1(r, \theta)$$

(para la derivación término a término hemos invocado fervorosamente a los demiurgos de la convergencia...)

Este tipo de problemas, entre otros, motivaron el desarrollo del análisis funcional, especialmente de la teoría de los Espacios de Hilbert (David Hilbert, 1862 – 1943). En la presentación de las series de Fourier hemos utilizado un punto de vista geométrico, pues suponemos que permite entender mejor el problema. Intentemos algo parecido, pues la situación es análoga. Simplifiquemos un poco las ecuaciones (16) utilizando la exponencial compleja:

$$v_0(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} J_{|n|} \left( \frac{\mu_{n,k}}{r_0} r \right) e^{in\theta} \quad (17)$$

$$v_1(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{n,k} J_{|n|} \left( \frac{\mu_{n,k}}{r_0} r \right) e^{in\theta}$$

donde (son cuentitas sencillas) para todo  $k$  entero positivo:

$$c_{n,k} = \frac{a'_{n,k} - ib'_{n,k}}{2} a_{n,k} \quad , \quad c_{-n,k} = \frac{a'_{n,k} + ib'_{n,k}}{2} a_{n,k} \quad \text{si } n > 0 \quad \text{y } c_{0,k} = a'_{0,k} a_{0,k}$$

$$d_{n,k} = \frac{a_{n,k} - ib_{n,k}}{2} b_{n,k} \frac{\mu_{n,k}}{r_0} c \quad , \quad d_{-n,k} = \frac{a'_{n,k} + ib'_{n,k}}{2} b_{n,k} \frac{\mu_{n,k}}{r_0} c \quad \text{si } n > 0 \quad (18)$$

$$\text{y } d_{0,k} = a_{0,k} b_{n,k} \frac{\mu_{0,k}}{r_0} c$$

Para cada entero  $n$  y cada entero positivo  $k$ , indiquemos con  $e_{n,k}$  a la función

$$e_{n,k}(r, \theta) = J_{|n|} \left( \frac{\mu_{n,k}}{r_0} r \right) e^{in\theta}$$

$$0 \leq r \leq r \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (19)$$

Con esta notación, las ecuaciones (17) se expresan

$$\begin{aligned}
v_0 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{n,k} e_{n,k} \\
v_1 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} d_{n,k} e_{n,k}
\end{aligned} \tag{20}$$

No solamente hemos simplificado la notación. Esta forma de plantear el problema permite observar su analogía con el problema de la convergencia de las series de Fourier, sobre todo si se observa desde un punto de vista geométrico. Veamos primero el hábitat de las funciones  $v_0$  y  $v_1$  que pueden aparecer como condiciones iniciales en el problema (3). Dado el origen físico de este problema, es razonable suponer que estas funciones son continuas en el rectángulo  $[0, r_0] \times [-\pi, \pi]$ , de clase  $C^1$  en el interior  $(0, r_0) \times (-\pi, \pi)$  y que además verifican  $v_0(r, -\pi) = v_0(r, \pi)$  y  $v_1(r, -\pi) = v_1(r, \pi)$  para todo  $r \in [0, r_0]$ . La imposición de la continuidad en las derivadas parciales es demasiado restrictiva y se pueden considerar funciones continuas con derivadas parciales *seccionalmente continuas*, pero este concepto requeriría un buen parágrafo de precisiones. Comencemos, entonces, por el universo donde vamos a trabajar:

$E$ : espacio vectorial de las funciones continuas  $f : [0, r_0] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ , de clase  $C^1$  en  $(0, r_0) \times (-\pi, \pi)$  y tales que  $f(r, -\pi) = f(r, \pi)$  para todo  $r \in [0, r_0]$

Este espacio es un espacio vectorial de dimensión infinita donde están, en particular, las funciones  $e_{n,k}$ . Lo que nos permitiría resolver las ecuaciones (20) a la manera de las series de Fourier son dos herramientas, una práctica y otra teórica:

(1) Un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $E$  respecto del cual el sistema  $(e_{n,k})_{n=-\infty, k=1}^{+\infty, +\infty}$  sea ortogonal. Dado que estas funciones son no nulas, la existencia de un tal producto interno requiere e implica la independencia lineal de las mismas. Con este producto interno, los coeficientes de cualquier combinación lineal  $f = \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{k=1}^{+K} c_{n,k} e_{n,k}$  quedan determinados por la fórmula  $c_{n,k} = \frac{\langle e_{n,k}, f \rangle}{\|e_{n,k}\|^2}$ , conocida desde nuestra más tierna infancia, donde la norma es la asociada al producto interno y vamos a indicarla  $\|\cdot\|_2$  (pues hay otras normas merodeando por ahí).

Ahora, siguiendo las mismas ideas que hemos desarrollado en el apunte sobre series de Fourier (proyecciones ortogonales, teorema de Pitágoras, desigualdad de Bessel, igualdad de Parseval, etc), nos planteamos si es cierto que:

(2) Un teorema de convergencia, que asegure que para toda  $f \in E$  se verifica que

$${}_{N,K} \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N \sum_{k=1}^K c_{n,k}(f) e_{n,k} \right\|_2 = 0, \text{ donde } c_{n,k}(f) = \frac{\langle e_{n,k}, f \rangle}{\|e_{n,k}\|^2}.$$

Resolver la cuestión (2) es extremadamente más difícil que resolver la cuestión (1), aunque ésta tampoco es trivial. En general estos productos son de la forma

$$\langle f, g \rangle = \iint_{[0, r_0] \times [0, 2\pi]} \overline{f(r, \theta)} g(r, \theta) w(r, \theta) dr d\theta$$

donde  $w: [0, r_0] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{R}$  es una función real continua y positiva en el interior del rectángulo. Además, al igual que en el caso de las series de Fourier, se impone naturalmente el estudio de otros tipos de convergencia, especialmente la puntual y la uniforme. Nos llevaría muchísimas páginas dar una idea básica del estudio de estos problemas. La idea de este apunte, ya demasiado extenso para sus propósitos, era mostrar cómo determinados problemas de la física motivaron desarrollos matemáticos profundos. Damos alguna indicación en el apéndice y como hemos dicho ya, existe una vasta bibliografía sobre estos temas. Dejamos al interesado una breve lista bibliográfica al final de este apunte. Por mi parte, tengo una preferencia especial por la obra [S] allí citada.

Terminaremos con un caso relativamente sencillo del problema (3), que nos permita ilustrar lo anterior.

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \frac{\partial^2 v(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si } 0 < r < 1, t > 0 \\ (ii) \quad v(1, \theta, t) = 0 \quad \text{si } t \geq 0 \\ (iii) \quad (a) \quad v(r, \theta, 0) = 0 \quad \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ \quad \quad (b) \quad \frac{\partial v(r, \theta, 0)}{\partial t} = v_1(r) \quad \text{si } 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right. \quad (21)$$

Es decir:  $r_0 = c = 1$  (siempre se pueden considerar estos valores mediante un cambio de escalas en  $r$  y en  $t$ ), posición inicial  $v_0$  nula y la velocidad inicial  $v_1$  no depende de  $\theta$ : la membrana estaba muy tranquila, en reposo, y alguien le dio un golpecito. Por suerte, un golpecito bastante prolijito. La expresión (15) de la solución general de (ii) y (iii) es, en este caso:

$$v(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n(\mu_{n,k} r) [a'_{n,k} \cos(n\theta) + b'_{n,k} \text{sen}(n\theta)] [a_{n,k} \cos(\mu_{n,k} t) + b_{n,k}(\mu_{n,k} t) \text{sen}(\mu_{n,k} t)] \quad (22)$$

y las condiciones iniciales son:

$$v(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n(\mu_{n,k} r) [a'_{n,k} \cos(n\theta) + b'_{n,k} \text{sen}(n\theta)] a_{n,k} = 0$$

$$\frac{\partial v(r, \theta, 0)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n(\mu_{n,k} r) [a'_{n,k} \cos(n\theta) + b'_{n,k} \text{sen}(n\theta)] b_{n,k} \mu_{n,k} = v_1(r)$$
(23)

Tenemos cuatro sucesiones dobles de coeficientes a determinar. Para satisfacer la primera condición, elegimos  $a_{n,k} = 0$  para todos  $n$  y  $k$ . Insistimos en la importancia del teorema de unicidad: sabemos que si encontramos una solución del problema, es única y por lo tanto, no tenemos que preocuparnos en cada paso por las posibles soluciones descartadas. En la segunda condición inicial, como la función  $v_1$  no depende de  $\theta$ , la elección natural (por no decir forzada) es elegir  $a'_{n,k} = b'_{n,k} = 0$  para todo  $n \geq 1$  y todo  $k \geq 1$ . Con estas elecciones, tenemos

$$v(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_{0,k} r) a'_{0,k} b_{0,k} \text{sen}(\mu_{0,k} t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\mu_{0,k} r) \text{sen}(\mu_{0,k} t)$$
(24)

donde hemos puesto  $c_k = a'_{0,k} b_{0,k}$ . Obsérvese que  $v$  tampoco depende de  $\theta$  y en general puede verse que si las condiciones iniciales son simétricas respecto del centro de la membrana circular, entonces también lo es  $v$  en cualquier instante  $t$ . Sigamos. Cualesquiera sean los coeficientes  $c_k$ , la función (24) satisface (i), (ii) y (iii) (a) del problema (21). Por lo tanto, estos coeficientes deben determinarse de manera que se verifique (iii)(b), es decir:

$$\frac{\partial v(r, \theta, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_{0,k} J_0(\mu_{0,k} r) = v_1(r)$$
(25)

Con la notación  $\varphi_k(r) = J_0(\mu_{0,k} r)$  y  $c'_k = c_k \mu_{0,k}$ , la ecuación para determinar los coeficientes es, sencillamente

$$\sum_{k=1}^{\infty} c'_k \varphi_k = v_1$$
(26)

Se trata de una situación mucho más sencilla que las más generales que planteamos en (20), pero esto no significa que sea fácil de resolver. De hecho, es una situación totalmente análoga al de las series de Fourier. Veamos primero un producto interno adecuado. Todas las funciones involucradas son reales y dependen de un sola variable:  $r \in [0,1]$ , por lo tanto nuestro espacio  $E$  es un espacio real de dimensión infinita que consiste en todas las funciones continuas  $f: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$  y seccionalmente de clase  $C^1$  (sospechamos que la sola continuidad no es suficiente, como ocurre con las series de Fourier). El producto interno que vamos a considerar aquí es muy sencillo:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(\rho)g(\rho)\rho d\rho \quad (27)$$

Con este producto, las funciones  $\varphi_k(r) = J_0(\mu_{0,k}r)$  son ortogonales. Más precisamente, como puede verse en – por ejemplo – el capítulo 11 de [AS], dedicado completamente a integrales de las funciones de Bessel:

$$\int_0^1 J_0(\mu_{0,k}\rho)J_0(\mu_{0,l}\rho)\rho d\rho = 0 \quad (28)$$

(para todos  $k$  y  $l$  distintos)

**Momento cultural:** Estas relaciones de ortogonalidad se suelen deducir a partir de las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones involucradas. En nuestro caso, se trata de las funciones  $\varphi_k(r) = J_0(\mu_{0,k}r)$  y la ortogonalidad se refiere al producto  $\langle f, g \rangle$

$= \int_0^1 f(\rho)g(\rho)\rho d\rho$ . Observemos en primer lugar que  $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$  para cualquier

$k \in \mathbb{N}$ , pues  $J_0(0) = 0$  y cada  $\mu_{0,k}$  es un cero positivo de  $J_0$ . Ahora bien, la función  $J_0$  satisface la ecuación  $x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$  para todo  $x$ , es decir:

$x J_0''(x) + J_0'(x) + x J_0(x) = 0$ . Reemplazando  $J_0(x) = \varphi_k\left(\frac{x}{\mu_{0,k}}\right)$  en esta identidad,

obtenemos

$$\frac{x}{(\mu_{0,k})^2} \varphi_k''\left(\frac{x}{\mu_{0,k}}\right) + \frac{1}{\mu_{0,k}} \varphi_k'\left(\frac{x}{\mu_{0,k}}\right) + x \varphi_k\left(\frac{x}{\mu_{0,k}}\right) = 0$$

o bien

$$\frac{x}{\mu_{0,k}} \varphi_k''\left(\frac{x}{\mu_{0,k}}\right) + \varphi_k'\left(\frac{x}{\mu_{0,k}}\right) + x \mu_{0,k} \varphi_k\left(\frac{x}{\mu_{0,k}}\right) = 0.$$

es decir  $r\varphi_k''(r) + \varphi_k'(r) + r(\mu_{0,k})^2\varphi_k(r) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y todo  $r$ . Escribamos esta identidad en la forma equivalente  $[r\varphi_k'(r)]' + r(\mu_{0,k})^2\varphi_k(r) = 0$  y consideremos ahora un par de naturales distintos,  $k \neq l$  (lo que implica  $\mu_{0,k} \neq \mu_{0,l}$ ). Tenemos, entonces, el par de identidades

$$\begin{cases} (k) & [r\varphi_k'(r)]' + r(\mu_{0,k})^2\varphi_k(r) = 0 \\ (l) & [r\varphi_l'(r)]' + r(\mu_{0,l})^2\varphi_l(r) = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera por  $\varphi_l(r)$  y la segunda por  $\varphi_k(r)$ , y luego restando miembro a miembro, nos queda

$$[r\varphi_k'(r)]'\varphi_l(r) - \varphi_k(r)[r\varphi_l'(r)]' + r[(\mu_{0,k})^2 - (\mu_{0,l})^2]\varphi_k(r)\varphi_l(r) = 0$$

Ahora bien, es muy sencillo comprobar que

$$[r\varphi_k'(r)]'\varphi_l(r) - \varphi_k(r)[r\varphi_l'(r)]' = [r\varphi_k'(r)\varphi_l(r) - \varphi_k(r)r\varphi_l'(r)]'$$

Reemplazando, queda  $[r\varphi_k'(r)\varphi_l(r) - \varphi_k(r)r\varphi_l'(r)]' + r[(\mu_{0,k})^2 - (\mu_{0,l})^2]\varphi_k(r)\varphi_l(r) = 0$ . Ahora, integrando ambos miembros respecto de  $r$  entre 0 y 1, resulta

$$[r\varphi_k'(r)\varphi_l(r) - \varphi_k(r)r\varphi_l'(r)]_{r=0}^{r=1} + [(\mu_{0,k})^2 - (\mu_{0,l})^2] \int_0^1 \varphi_k(r)\varphi_l(r)rdr = 0$$

Pero sabemos que  $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$  para todo entero positivo  $k$ , como hemos observado anteriormente, por lo tanto el primer término del primer miembro es nulo. Dado que  $\mu_{0,k} \neq \mu_{0,l}$ , se deduce entonces que  $\int_0^1 \varphi_k(r)\varphi_l(r)rdr = 0$ , es decir: (28).

***Fin del momento cultural.***

Por lo tanto, si se verifica la igualdad (26), entonces los coeficientes tendrían que ser, necesariamente:

$$c'_k = c'_k(v_1) = \frac{1}{\|\varphi_k\|_2^2} \langle v_1, \varphi_k \rangle = \frac{1}{\int_0^1 [J_0(\mu_{0,k}\rho)]^2 \rho d\rho} \int_0^1 v_1(\rho) J_0(\mu_{0,k}\rho) \rho d\rho \quad (29)$$

Estos coeficientes se denominan *coeficientes de Fourier-Bessel* de la función  $v_1$ , nombre que a esta altura no debería sorprender. Ahora, viene la parte más difícil: saber

si con estos coeficientes se verifica, efectivamente la igualdad  $\sum_{k=1}^{\infty} c'_k \varphi_k = v_1$ . Más aún: debemos aclarar, previamente, en qué sentido se entiende la igualdad, pues el miembro izquierdo es una serie, y por lo tanto lo que se plantea es si la serie converge a  $v_1$  según la norma  $\| \cdot \|_2$ , o bien si se verifica la convergencia puntual para todo  $r \in [0,1]$ , o si la serie converge uniformemente a  $v_1$ , o bien si converge según la norma  $\| \cdot \|_1$  (que en nuestro espacio está dada por  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(\rho)| \rho d\rho$ ). Una vez más, repetimos que este problema es muy difícil y que ha motivado profundos y extensos desarrollos del análisis funcional. Por otro lado, la comparación de estas formas de convergencia es muy sencilla de establecer, como por ejemplo que la convergencia uniforme implica todas las demás, tal como hemos visto en el apunte sobre series de Fourier.

Una respuesta afirmativa a alguna de estas cuestiones de convergencia nos permite afirmar que la solución del problema (21) es

$$v(r, \theta, t) = v(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(v_1) J_0(\mu_{0,k} r) \text{sen}(\mu_{0,k} t) \quad (30)$$

donde los coeficientes están dados por

$$c_k(v_1) = \frac{c'_k(v_1)}{\mu_{0,k}} = \frac{1}{\mu_{0,k} \int_0^1 [J_0(\mu_{0,k} \rho)]^2 \rho d\rho} \int_0^1 v_1(\rho) J_0(\mu_{0,k} \rho) \rho d\rho \quad (31)$$

y la igualdad (30), insistimos, puede significar alguna de las posibles convergencias que hemos mencionado. En la práctica, como es de esperar, la serie (30) se reemplaza por una suma finita con la “suficiente cantidad” de términos. Lo que podemos mencionar, para terminar, es que cada término de la serie (30), y más generalmente, de la serie (15), se denomina *modo normal* de vibración. Una visualización gráfica puede verse, por ejemplo, en: <https://demonstrations.wolfram.com/VibratingCircularMembrane/>. En los caso de simetría circular (es decir: cuando la posición  $v$  no depende de  $\theta$ ) se puede observar directamente, para cada instante  $t$ , la forma del gráfico de la función de Bessel correspondientes.

Para  $n = 0$ , la serie (13) nos da el desarrollo de  $J_0$  en serie:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2!)^2 2^2} - \frac{x^6}{(3!)^2 2^3} + \frac{x^8}{(4!)^2 2^4} - \dots \quad (32)$$

y los primeros ceros positivos pueden leerse, con buena aproximación numérica, en la primera columna de la siguiente tabla.

$k$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

**Fig. 2 Primeros ceros de las primeras cinco funciones de Bessel de orden entero**  
<https://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionZeros.html>

Es decir:  $\mu_{0,1} \approx 2,408$ ,  $\mu_{0,2} \approx 5,5201$ ,  $\mu_{0,3} \approx 8,6537$ ,  $\mu_{0,4} \approx 11,7915$ ,  $\mu_{0,5} \approx 14,9309$ . Con estos datos, se puede tener una idea aproximada de los graficos de las primeras cinco funciones  $\varphi_k(r) = J_0(\mu_{0,k}r)$ , cada una de las cuales se obtiene a partir de  $J_0$  mediante un cambio de escala.

## APÉNDICES

### APÉNDICE 0: ALGUNAS PROPIEDADES MÁGICAS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL DE ORDEN ENTERO

Para cada entero  $n \geq 0$  tenemos la correspondiente función de Bessel

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \frac{x^n}{n!2^n} - \frac{x^{2+n}}{(n+1)!2^{2+n}} + \frac{x^{4+n}}{2!(n+2)!2^{4+n}} - \dots \quad (0.1)$$

Se trata de una función analítica en toda la recta real, aunque solamente las hemos utilizado para  $x \geq 0$ . El radio de convergencia de estas series es  $\infty$  (como puede comprobarse fácilmente) y por lo tanto se extienden al plano complejo como funciones enteras. Cada una de ellas es una solución de la correspondiente ecuación de Bessel  $x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$ . Definamos, para cada  $n \geq 0$ , la función de Bessel de orden entero negativo

$$J_{-n}(x) := (-1)^n J_n(x) \quad (0.2)$$



que también, claramente, es solución de  $x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$  (mucho más evidente es que  $J_n$  y  $J_{-n}$  no son linealmente independientes).

Derivando término a término las series (0.1) y haciendo algunas cuentas, se pueden comprobar directamente las siguientes identidades:

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad (0.3)$$

válidas para todo entero (positivo o negativo)  $n$  y todo real (o complejo)  $x$ . Hace ya mucho tiempo, Leonhard Euler (1707 – 1783), el Maestro de todos los grandes matemáticos que lo sucedieron, enseñó que para el estudio de este tipo de sucesiones de funciones es conveniente considerar una función generatriz, que en nuestro caso es la serie de Laurent

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n \quad (0.4)$$

Estudiemos un poco el dominio de convergencia y para esto consideraremos  $x$  y  $z$  como variables complejas. Primero necesitamos una buena acotación de las funciones de Bessel. Para todo  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} |J_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+n}}{k!(n+k)!2^{2k+n}} = \frac{|x|^n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!2^{2k}} \leq \\ &\leq \frac{|x|^n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!n!2^{2k}} = \frac{|x|^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2^{2k}} = \frac{|x|^n}{2^n n!} e^{-4} \leq \frac{|x|^n}{2^n n!} \end{aligned} \quad (0.5)$$

Ahora, teniendo en cuenta (0.2):

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} J_{-n}(x) z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} J_n(x) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n J_n(x) z^{-n} + J_0(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} J_n(x) z^n$$

Estudiemos la convergencia absoluta de cada una de esas series por separado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n J_n(x) z^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|J_{-n}(x)|}{|z|^n} \stackrel{(0.5)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n n! |z|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \frac{x}{2z} \right|^n = e^{\left| \frac{x}{2z} \right|} - 1$$

(desigualdad válida para todo  $x$  y todo  $z \neq 0$ ). Para la segunda, análogamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n(x)z^n| \stackrel{(0.5)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n |z|^n}{2^n n!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \frac{xz}{2} \right|^n = e^{\left| \frac{xz}{2} \right|} - 1$$

para todo  $x$  y todo  $z$ . Por lo tanto, la serie (0.4) converge absolutamente para todo  $x$  y todo  $z \neq 0$ , y uniformemente en cada compacto contenido en  $\mathcal{C} \times (\mathcal{C} - \{0\})$ . En particular, para cada  $z \neq 0$  es una función analítica de  $x$  (corolario del Teorema de Morera: el límite uniforme de holomorfas es holomorfa; para eso era conveniente considerar a  $x$  como variable compleja). Podemos, entonces, derivar la serie alegremente término a término para todo  $(x, z) \in \mathcal{C} \times (\mathcal{C} - \{0\})$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n'(x) z^n \stackrel{(0.3)}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-1}(x) z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n+1}(x) z^n = \\ &= \frac{z}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-1}(x) z^{n-1} - \frac{1}{2z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n+1}(x) z^{n+1} = \frac{z}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k - \frac{1}{2z} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k = \\ &= \frac{z}{2} \varphi(x, z) - \frac{1}{2z} \varphi(x, z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) \varphi(x, z) \end{aligned}$$

Es decir, para todo  $(x, z) \in \mathcal{C} \times (\mathcal{C} - \{0\})$  la función  $\varphi$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) \varphi(x, z) = 0$$

Recordemos cómo se encontraban todas las soluciones de estas ecuaciones diferenciales (aquí es crucial que no se nos escape ninguna). Multiplicando ambos miembros por  $e^{-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)x}$ , que no se anula en ningún punto de  $\mathcal{C} \times (\mathcal{C} - \{0\})$ :

$$e^{-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)x} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) e^{-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)x} \varphi(x, z) = 0$$

El primer miembro es la derivada de un producto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)x} \varphi(x, z) \right) = 0$$

Para cada  $z \neq 0$ , esta igualdad se verifica para todo  $x \in \mathbb{C}$ , que es un dominio conexo.

Por lo tanto, para cada  $z \neq 0$  existe una constante  $c(z)$  tal que  $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)x} \varphi(x, z) = c(z)$ , es decir:

$$\varphi(x, z) = c(z) e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)x}$$

Esta identidad se verifica para todo  $(x, z) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\})$ . En particular, para  $x = 0$  y cualquier  $z \neq 0$ :  $\varphi(0, z) = c(z)$ . Pero  $J_n(0) = 0$  para todo  $n \neq 0$  y  $J_0(0) = 1$ , por lo tanto

$\varphi(0, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(0) z^n = 1$  y entonces para  $z \neq 0$ :  $c(z) = 1$ . Obtenemos, en definitiva, la identidad

$$e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n \quad (0.6)$$

para todo  $(x, z) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\})$

Identidades de esta clase suelen tener consecuencias mágicas. Veamos algunas

inmediatas. Para  $z = e^{i\theta}$ , la identidad (0.6) es  $e^{\frac{1}{2}x(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta}$ , es decir:

$$e^{ix \operatorname{sen}(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta} \quad (0.7)$$

Por lo tanto, para cada  $x$ , los números  $J_n(x)$  son los coeficientes de Fourier de la función  $2\pi$ -periódica  $f_x(\theta) = e^{ix \operatorname{sen}(\theta)}$ . Es decir:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \operatorname{sen}(\theta)} e^{-in\theta} d\theta \quad (0.8)$$

No creo que sea necesario destacar la importancia de estas expresiones integrales de las funciones de Bessel de orden entero. Considerando ahora  $x$  real (el caso que nos interesaba era  $x$  real no negativo), separemos parte real e imaginaria en estas dos últimas identidades.

El integrando de (0.8) es  $e^{i[x \operatorname{sen}(\theta) - n\theta]} = \cos[x \operatorname{sen}(\theta) - n\theta] + i \operatorname{sen}[x \operatorname{sen}(\theta) - n\theta]$  y su parte imaginaria es impar, por lo tanto su integral en  $[-\pi, \pi]$  es nula. Por lo tanto, para  $x$  real es

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[x \operatorname{sen}(n\theta) - n\theta] d\theta$$

( $x$  real) (0.9)

En (0.7) tenemos

$$\begin{aligned}
 \cos[x\text{sen}(\theta)] + i\text{sen}[x\text{sen}(\theta)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)e^{in\theta} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(x)e^{in\theta} + J_{-n}(x)e^{-in\theta}] = \\
 &\stackrel{(0.2)}{=} J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(x)e^{in\theta} + (-1)^n J_n(x)e^{-in\theta}] = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)[e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}] = \\
 &= J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)[e^{i2k\theta} + e^{-i2k\theta}] + \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x)[e^{i(2k+1)\theta} - e^{-i(2k+1)\theta}] = \\
 &= J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos(2k\theta) + 2i\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x)\text{sen}((2k+1)\theta)
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
 \cos[x\text{sen}(\theta)] &= J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos(2k\theta) \\
 \text{sen}[x\text{sen}(\theta)] &= 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x)\text{sen}((2k+1)\theta)
 \end{aligned} \tag{0.10}$$

Este par de identidades representan la forma real trigonométrica de (0.7) y explican la sorprendente aparición de las funciones de Bessel en la modulación de frecuencias (y la consecuente aparición de las emisiones musicales en FM... ). En particular, para  $\theta = 0$ , la primera de las identidades (0.10) resulta en otra mágica fórmula :

$$\begin{aligned}
 1 &= J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \\
 &\text{(para todo } x)
 \end{aligned} \tag{0.11}$$

(la segunda no resulta en nada interesante). Ahora, para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned}
 \cos(x) &= J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \\
 \text{sen}(x) &= 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x) \\
 &\text{(para todo } x)
 \end{aligned} \tag{0.12}$$

Estas sorprendentes identidades insinúan la posibilidad de reemplazar al sistema trigonométrico por las funciones de Bessel de orden entero para el estudio de funciones periódicas, pero no nos extenderemos más en esta línea. Preferimos terminar esta sección del apéndice con una última fórmula mágica: para todos  $x, y$  y  $z \neq 0$  :

$$e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)x} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)y} = \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) z^m \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(y) z^n \right)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y) z^n = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)(x+y)} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)x} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)y} = \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) z^m \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(y) z^n \right) =$$

(fórmula de Cauchy para el producto de series de Laurent)

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{n-k}(x) J_k(y) \right) z^n$$

Igualando los coeficientes de las potencias de  $z$  obtenemos la famosa *fórmula de la adición*, válida para cualquier entero  $n$  y cualquier par de complejos  $x$  e  $y$ .

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{n-k}(x) J_k(y) \quad (0.13)$$

## APÉNDICE 1. FORMAS NORMALES, AUTOADJUNTAS E INVARIANTES.

Dada la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden

$$\alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + [\lambda - \gamma(x)]y(x) = 0 \quad (1.1)$$

se considera la situación en que los coeficientes son analíticos en un intervalo real  $I$ , donde el coeficiente principal  $\alpha$  es estrictamente positivo.

(A) Dividiendo la ecuación (1.1) por el coeficiente principal se obtiene la *forma normal*

$$y''(x) + f(x)y'(x) + [\lambda g(x) - h(x)]y(x) = 0 \quad (1.2)$$

en el mismo intervalo  $I$  y con las notaciones obvias.

(B) Sea  $x_0$  un punto del intervalo  $I$  y sea  $\varphi(x) = \int_{x_0}^x \frac{\beta(t) - \alpha'(t)}{\alpha(t)} dt$  una primitiva de  $\frac{\beta - \alpha'}{\alpha}$

en  $I$ . Multiplicando (1.1) por  $w(x) = e^{\varphi(x)}$  se obtiene la ecuación equivalente

$$p(x)y''(x) + p'(x)y(x) + [\lambda w(x) - q(x)]y(x) = 0 \quad (1.3)$$

(en el mismo intervalo  $I$ ), donde  $p(x) = w(x)\alpha(x)$  y  $q(x) = w(x)\gamma(x)$ . Esta forma de la ecuación se denomina *autoadjunta* y la función  $w$ , *weighting function*. Obsérvese que el coeficiente principal de la forma autoadjunta sigue siendo estrictamente positivo.

(C) Sea  $\phi : I \rightarrow \mathfrak{R}$  una primitiva de  $\frac{\beta}{2\alpha}$ , es decir  $\phi(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt$  para algún  $x_0 \in I$ ,

y sea  $u(x) = y(x)e^{\phi(x)}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha y'' + \beta y' + (\lambda - \gamma)y &= \alpha [u'' e^{-\phi} - 2u' e^{-\phi} \phi' + u e^{-\phi} \phi'^2 - u e^{-\phi} \phi''] + \beta [u' e^{-\phi} - u e^{-\phi} \phi'] + (\lambda - \gamma) u e^{-\phi} = \\ &= \alpha e^{-\phi} u'' + [-2\alpha \phi' + \beta] e^{-\phi} + [\alpha \phi'^2 - \phi'' - \beta \phi' + \lambda - \gamma] e^{-\phi} u = \alpha e^{-\phi} [u'' - Q(x, \lambda)u] \end{aligned}$$

donde  $Q(x, \lambda) = \phi'^2 - \frac{\phi''}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \phi' + \frac{\lambda - \gamma}{\alpha}$ . Por lo tanto, la ecuación (1.1) es equivalente (en el mismo intervalo  $I$ ) a

$$u''(x) - Q(x, \lambda)u(x) = 0 \quad (1.4)$$

La función  $e^{\phi(x)}$  se denomina *invariante* de la ecuación (1.1) y en el caso particular de la forma autoadjunta se tiene  $\phi(x) = \int_{x_0}^x \frac{p'(t)}{2p(t)} dt = \ln(\sqrt{p(x)}) - \ln(\sqrt{p(x_0)})$  y por lo tanto el invariante es (salvo una constante multiplicativa)  $\sqrt{p(x)}$ .

Algunos de los ejemplos más importantes de las ecuaciones (1.1) son:

1) Gauss' (Hypergeometric) Equation:  $(x^2 - x)y'' + [(1 + \alpha + \beta)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0$

2) Bessel's Equation:  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

3) Hermite's Equation:  $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$

4) Laguerre's Equation:  $xy'' + (1 - x)y' + \alpha y = 0$

5) Legendre's Equation:  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0$  (*Zonal harmonics*)

## APÉNDICE 2: RUDIMENTOS DE LA TEORÍA DE STURM-LIOUVILLE

Sea  $E$  el espacio lineal real de las funciones  $u : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  de clase  $C^\infty$  (es decir: restricciones a  $[a, b]$  de funciones de clase  $C^\infty$  en algún abierto que contiene a  $[a, b]$ , y dos de tales funciones se consideran el mismo elemento de  $E$  si sus restricciones a  $[a, b]$  son iguales; obsérvese que se trata efectivamente de una relación de equivalencia). En

este espacio se tiene el producto interno  $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$ . (No se trata de un

espacio de Hilbert, pues no es completo). Ahora, sean  $p$  y  $q$  dos elementos de  $E$ , con la condición

$$p(a) = p(b) = 0 \quad (2.1)$$

El operador  $L(y) = py'' + p'y' - qy$  es autoadjunto en el espacio  $E$ , es decir:  $\langle L(u), v \rangle = \langle u, L(v) \rangle$ . Veamos:

$$\begin{aligned} \langle L(u), v \rangle &= \int_a^b [pu'' + p'u' - qu]v \, w \, dt = \int_a^b [(pu')' - qu]v \, w \, dt = \int_a^b (pu')'v \, w \, dt - \int_a^b quv \, w \, dt \\ &= \int_a^b [(pu'v)' - pu'v'] \, w \, dt - \int_a^b quv \, w \, dt = [pu'v]_a^b - \int_a^b pv'u' \, w \, dt - \int_a^b quv \, w \, dt = \\ &= 0 - \int_a^b [(pv'u)' - p'v'u - pv''u] \, w \, dt - \int_a^b quv \, w \, dt = [pv'u]_a^b + \int_a^b u[pv'' + p'v' - qv] \, w \, dt = \\ &= 0 + \langle u, L(v) \rangle \end{aligned}$$

Resulta inmediatamente que los autovalores de  $L$  son reales y que los autovectores (= *autofunciones*) correspondientes a distintos autovalores son ortogonales. Más complicado (y profundo) es el problema de demostrar que existe un sistema numerable ortonormal  $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$  de autovectores (es decir:  $L(\phi_n) = \mu_n \phi_n$ ) que sea denso en el espacio  $E$ , es decir, tal que para toda  $u \in E$  se verifique  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{n=1}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 = 0$ .

Éste problemas y otros relacionados son estudiados (y resueltos) por la teoría de Sturm-Liouville.

**NOTA 2.1:** El *Problema de Sturm-Liouville* ([MM] p. 253-254) se plantea en un intervalo  $I = [a, b]$ :

$$\begin{aligned} (1) \quad & p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + [\lambda w(x) - q(x)]y(x) = 0 \\ (2) \quad & p(a)y(a)y'(a) = p(b)y(b)y'(b) = 0 \end{aligned}$$

La condición (2.1), que obviamente implica (2), es demasiado restrictiva como para incluir en este caso algunas ecuaciones importantes (como la Bessel, por ejemplo), pero es indispensable alguna restricción de este tipo como para que el conjunto de funciones que satisfacen (2) tenga la estructura de un espacio lineal y que el operador  $L$  sea efectivamente un endomorfismo en dicho espacio. Una ecuación que sí cae dentro de este caso es la de Legendre, para la cual  $p(x) = 1 - x^2$ , es decir:  $a = -1$  y  $b = 1$ .

**NOTA 2.2:** La forma autoadjunta de la ecuación de Bessel es  $xy'' + y' + (x - \frac{v^2}{x})y = 0$ , es decir:  $\lambda = -v^2$ ,  $w(x) = \frac{1}{x}$ ,  $q(x) = -x$ ,  $p(x) = x$ ,  $L(y) = xy'' + y' + xy$ , y dada una función de Bessel  $J_v$  se tiene  $L(J_v)(x) = \frac{v^2}{x} J_v(x)$ . Por lo tanto para estudiar esta ecuación mediante un la diagonalización de un operador lineal, se puede considerar directamente el operador  $T(y)(x) = x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)$ , pues  $T(J_v) = v^2 J_v$ . Si bien este

operador *no* es autoadjunto (respecto del producto  $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$  en algún intervalo  $[a, b]$ ), es diagonalizable, es decir: admite un sistema numerable de autovectores denso en el correspondiente espacio. El estudio del problema de Sturm-Liouville para operadores en forma invariante puede verse con todo detalle y rigor en [D].

Completamos este mini resumen con un par de teoremas referidos a los ceros de las soluciones de la ecuación (1.1) del apéndice 1. En particular, estos teoremas se aplican a las funciones de Bessel.

**TEOREMA DE SEPARACIÓN DE STURM:** Dadas dos soluciones linealmente independientes  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación (1.1) del apéndice 1 (en el intervalo  $I$ , donde el coeficiente principal es estrictamente positivo), entonces los ceros de  $y_1$  e  $y_2$  (si existen) se alternan en  $I$ .

**TEOREMA DE COMPARACIÓN DE STURM:** Sean  $y_1$  e  $y_2$  dos soluciones no triviales de las ecuaciones  $y''+p_1(x)y=0$  ,  $y''+p_2(x)y=0$  (respectivamente) en un intervalo  $I$  donde  $p_1 > p_2$  . Entonces, entre dos ceros cualesquiera de  $y_2$  existe al menos un cero de  $y_1$ .

Las demostraciones pueden verse en [KKO], por ejemplo.

## REFERENCIAS:

[AS] Abramovitz, M, Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. 1970. Dover.

[D]: Dieudonné, J. *Fundamentos del Análisis Moderno*. 1976. Reverté. (Original: *Topology*. 1974. Addison-Wesley).

[KKM]: Kiseliiov, A., Krasnov, M., Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. 1973. Mir.

[KKO]: Kreider, D., Kuller, O., Ostberg. «Elementary Differential Equations». 1968. Addison-Wesley.

[MM]: Margenau, H. - Murphy, G. M. *The Mathematics of Physics and Chemistry* . 1943. Van Nostrand Co.

[S]: Stein, E. – Shakarchi, R. *Princeton Lectures in Analysis*. (I: Fourier Analysis. An Introduction – II: Complex Analysis – III: Real Analysis. Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces – IV: Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis). 2002-2011 - Princeton University Press.